Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores

Lijnen door de oorsprong en een cirkel

1 **maximumscore 5**

- Een vergelijking van c is $(x-1)^2+(y-7)^2=25$ — 1
- Voor de snijpunten geldt $(t-1)^2+(2t-7)^2=25$ — 1
- Herleiden tot $5t^2-30t+25=0$ — 1
- Een exacte berekening waaruit volgt $t=1$ of $t=5$ — 1
- De snijpunten zijn $(1,2)$ en $(5,10)$ — 1

of

- Een vergelijking van c is $(x-1)^2+(y-7)^2=25$ — 1
- Voor de snijpunten geldt (omdat $x=\frac{1}{2}y$ een vergelijking van k is) $\left(\frac{1}{2}y-1\right)^2+(y-7)^2=25$ — 1
- Herleiden tot $\frac{5}{4}y^2-15y+25=0$ — 1
- Een exacte berekening waaruit volgt $y=2$ of $y=10$ — 1
- De snijpunten zijn $(1,2)$ en $(5,10)$ — 1

Rechts van het snijpunt

2 **maximumscore 5**

- De x-coördinaat van A is 4,5 — 1
- De afgeleide van f is $f'(x)=-6\sin(2x)-\frac{1}{\sqrt{2x}}$ — 2
- Beschrijven hoe uit de vergelijking $-6\sin(2x)-\frac{1}{\sqrt{2x}}=0$ de x-coördinaat van B gevonden kan worden — 1
- Deze x-coördinaat is $4,7...(>4,5)$, dus B ligt rechts van A — 1

Opmerking
Als de kandidaat bij het differentiëren de kettingregel niet of niet correct heeft toegepast, voor deze vraag maximaal 3 scorepunten toekennen.

Altijd raak

3 maximumscore 5

- $f_p'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-p}}$ 1
- In het raakpunt moet gelden $\dfrac{1}{2\sqrt{x-p}} = 1$ 1
- Hieruit volgt $x = \frac{1}{4} + p$ 1
- $f_p\left(\frac{1}{4}+p\right) = p + \sqrt{\frac{1}{4}+p-p} = p + \frac{1}{2}$ 1
- $x = \frac{1}{4} + p$ invullen in de vergelijking van k geeft $y = \frac{1}{4} + p + \frac{1}{4} = p + \frac{1}{2}$, dus lijn k raakt de grafiek van f_p voor elke toegestane waarde van p 1

of

- Bekijk $g(x) = \sqrt{x}$, dan $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 1
- In het raakpunt moet gelden $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 1$, dus $x = \frac{1}{4}$ 1
- $g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ en $x = \frac{1}{4}$ invullen in de vergelijking van k geeft $y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, dus lijn k raakt de grafiek van g 1
- De grafiek van f_p ontstaat uit de grafiek van g door deze p naar rechts en p omhoog te verschuiven 1
- (Deze verschuiving komt overeen met de vector $\begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix}$ en) dat is de richtingsvector van lijn k, dus lijn k raakt de grafiek van f_p voor elke toegestane waarde van p 1

4 maximumscore 3

- De x-coördinaat van het randpunt van de grafiek van f_p is p 1
- $f_{p-1}(x) = p - 1 + \sqrt{x-p+1}$ 1
- $f_{p-1}(p) = p = f_p(p)$ (, dus het randpunt van de grafiek van f_p ligt op de grafiek van f_{p-1}) 1

5 maximumscore 5

- Een vergelijking van lijn l is $y = x$ 1
- De oppervlakte is gelijk aan $\int_1^2 \left(1 + \sqrt{x-1} - x\right) \mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $1 + \sqrt{x-1} - x$ is $x + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2$ 2
- De oppervlakte is gelijk aan $\frac{1}{6}$ 1

Opmerking
Voor het derde antwoordelement mogen 0, 1 of 2 scorepunten worden toegekend.

Slingshot

6 maximumscore 3

- $L = \sqrt{20^2 + 7^2}$ 1
- $L = 21{,}18...$ (of $L - 8 = 13{,}18...$) 1
- $F_k = 7{,}9$ (kN) 1

7 maximumscore 6

- $L = \sqrt{x^2 + 49}$ 1
- $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{L}$ 1
- $F_{kv} = 2 \cdot 0{,}6 \cdot \left(\sqrt{x^2 + 49} - 8\right) \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 49}}$ 1
- De vergelijking $2 \cdot 0{,}6 \cdot \left(\sqrt{x^2 + 49} - 8\right) \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 49}} = 1{,}8$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking wordt opgelost 1
- $x = 7{,}25...$, dus het antwoord is 13 (m) 1

Een logaritmische functie en haar afgeleide

8 maximumscore 5

- $g(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1$ 1
- Uit $f(x) = g(x)$ volgt $x\ln(x) - x + 1 = \ln(x)$ 1
- Hieruit volgt $(x-1)\ln(x) = x - 1$ 1
- Hieruit volgt $x - 1 = 0$ of $\ln(x) = 1$ 1
- Dus $x = 1$ of $x = \mathrm{e}$ 1

9 maximumscore 7

- $\int_{p}^{2p} g(x)\,\mathrm{d}x = f(2p) - f(p)$ — 1
- $f(2p) - f(p) = 2p \cdot \ln(2p) - 2p + 1 - (p \cdot \ln(p) - p + 1)$ — 1
- Uit $\int_{p}^{2p} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ volgt $2p \cdot \ln(2p) - p \cdot \ln(p) = p$ — 1
- $2\ln(2p) - \ln(p) = 1$ ($p = 0$ voldoet niet) — 1
- Het linkerlid is gelijk aan $\ln\left(\frac{(2p)^2}{p}\right) = \ln(4p)$, dus de vergelijking $\ln(4p) = 1$ moet worden opgelost — 2
- Hieruit volgt $p = \frac{1}{4}\mathrm{e}$ — 1

of

- $\int_{p}^{2p} g(x)\,\mathrm{d}x = f(2p) - f(p)$ — 1
- $f(2p) - f(p) = 2p \cdot \ln(2p) - 2p + 1 - (p \cdot \ln(p) - p + 1)$ — 1
- Uit $\int_{p}^{2p} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ volgt $2p \cdot \ln(2p) - p \cdot \ln(p) = p$ — 1
- $2\ln(2p) - \ln(p) = 1$ ($p = 0$ voldoet niet) — 1
- Het linkerlid is gelijk aan $2(\ln(2) + \ln(p)) - \ln(p) = 2\ln(2) + \ln(p)$, dus de vergelijking $\ln(p) = 1 - 2\ln(2)$ moet worden opgelost — 2
- Een exacte berekening waaruit volgt $p = \frac{1}{4}\mathrm{e}$ — 1

of

- De oppervlaktes van de vlakdelen moeten gelijk zijn en het snijpunt van de grafiek met de x-as ligt bij $x = 1$, dus de vergelijking $-\int_{p}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{2p} g(x)\,\mathrm{d}x$ moet worden opgelost — 1
- Hieruit volgt de vergelijking $-(f(1) - f(p)) = f(2p) - f(1)$ — 1
- Dit geeft $p \cdot \ln(p) - p + 1 = 2p \cdot \ln(2p) - 2p + 1$ — 1
- $2\ln(2p) - \ln(p) = 1$ ($p = 0$ voldoet niet) — 1
- Het linkerlid is gelijk aan $\ln\left(\frac{(2p)^2}{p}\right) = \ln(4p)$, dus de vergelijking $\ln(4p) = 1$ moet worden opgelost — 2
- Hieruit volgt $p = \frac{1}{4}\mathrm{e}$ — 1

Opmerking
Voor het vijfde antwoordelement van het eerste, tweede en derde antwoordalternatief mogen 0, 1 of 2 scorepunten worden toegekend.

Gebroken goniometrische functie

10 maximumscore 6

- De vergelijking $\frac{\cos(x)}{-\sin^2(x)} = \sqrt{2}$ moet worden opgelost 1
- $\frac{\cos(x)}{\cos^2(x)-1} = \sqrt{2}$ 1
- Hieruit volgt $\sqrt{2}\cdot\cos^2(x) - \cos(x) - \sqrt{2} = 0$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking exact opgelost kan worden 1
- Dit geeft $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ($\cos(x) = \sqrt{2}$ heeft geen oplossingen) 1
- Hieruit volgt dat de x-coördinaten van A en B $\frac{3}{4}\pi$ en $\frac{5}{4}\pi$ zijn 1

11 maximumscore 6

- De teller en de noemer moeten (voor dezelfde waarde van x) gelijk zijn aan 0 1
- De teller is 0 als $x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot\pi$ 1
- Voor al deze waarden van x geldt: $\sin^2(x) = 1$ 1
- (Voor al deze waarden van x geldt:) de noemer is 0 als $p = 1$ 1
- $f_1(x) = \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} = \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$ 1
- $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} f_1(x)$ (en de limiet voor de andere waarden van x) bestaat niet, dus de grafiek van f_1 heeft geen perforatie (dus er is geen waarde van p waarvoor de grafiek van f_p een perforatie heeft) 1

of

- De teller en de noemer moeten (voor dezelfde waarde van x) gelijk zijn aan 0 1
- De teller is 0 als $x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot\pi$ 1
- Voor al deze waarden van x geldt: $\sin^2(x) = 1$ 1
- (Voor al deze waarden van x geldt:) de noemer is 0 als $p = 1$ 1
- De onderbouwde constatering dat de grafiek van f_1 bij $x = \frac{1}{2}\pi$ (en voor de andere waarden van x) een verticale asymptoot heeft 1
- Dus de grafiek van f_1 heeft geen perforatie (dus er is geen waarde van p waarvoor de grafiek van f_p een perforatie heeft) 1

of

- De teller en de noemer moeten (voor dezelfde waarde van x) gelijk zijn aan 0 — 1
- De noemer is 0 als $\sin^2(x) = p$; dan geldt $\cos^2(x) = 1 - p$, dus $\cos(x) = \pm\sqrt{1-p}$ — 1
- De teller is voor zo'n waarde van x gelijk aan 0 als $p = 1$ — 1
- $f_1(x) = \dfrac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)}$ — 1
- $\cos(x) = 0$ als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ — 1
- $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} f_1(x)$ (en de limiet voor de andere waarden van x) bestaat niet, dus de grafiek van f_1 heeft geen perforatie (dus er is geen waarde van p waarvoor de grafiek van f_p een perforatie heeft) — 1

Opmerking
Als de kandidaat de functies f_p niet op hun hele domein beschouwt en bij het oplossen van $\cos(x) = 0$ bijvoorbeeld alleen de oplossing $x = \frac{1}{2}\pi$ gebruikt, voor deze vraag hoogstens 5 scorepunten toekennen.

12 **maximumscore 4**

- De punten zijn $P\left(0, \frac{1}{p}\right)$, $Q\left(\pi, -\frac{1}{p}\right)$ en $R\left(2\pi, \frac{1}{p}\right)$ 1
- De richtingscoëfficiënt van PQ is $-\frac{2}{p\pi}$ en van QR $\frac{2}{p\pi}$ 1
- PQ en QR staan loodrecht op elkaar als $-\frac{2}{p\pi} \cdot \frac{2}{p\pi} = -\frac{4}{p^2\pi^2} = -1$ 1
- Hieruit volgt $p = -\frac{2}{\pi}$ of $p = \frac{2}{\pi}$ 1

of

- De punten zijn $P\left(0, \frac{1}{p}\right)$, $Q\left(\pi, -\frac{1}{p}\right)$ en $R\left(2\pi, \frac{1}{p}\right)$ 1
- $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} \pi \\ -\frac{2}{p} \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{2}{p} \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{PQ}$ en $\overrightarrow{QR}$ staan loodrecht op elkaar als $\begin{pmatrix} \pi \\ -\frac{2}{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{2}{p} \end{pmatrix} = \pi^2 - \frac{4}{p^2} = 0$ 1
- Hieruit volgt $p = -\frac{2}{\pi}$ of $p = \frac{2}{\pi}$ 1

of

- De punten zijn $P\left(0, \frac{1}{p}\right)$, $Q\left(\pi, -\frac{1}{p}\right)$ en $R\left(2\pi, \frac{1}{p}\right)$ 1
- Omdat driehoek PQR symmetrisch is ten opzichte van de verticale lijn door Q en $x_Q - x_P = \pi$, staan PQ en QR loodrecht op elkaar als ook $\left|y_P - y_Q\right| = \pi$ 1
- Dus als $\left(\left|\frac{1}{p} - -\frac{1}{p}\right| =\right)$ $\left|\frac{2}{p}\right| = \pi$ 1
- Hieruit volgt $p = -\frac{2}{\pi}$ of $p = \frac{2}{\pi}$ 1

of

- De punten zijn $P\left(0, \frac{1}{p}\right)$, $Q\left(\pi, -\frac{1}{p}\right)$ en $R\left(2\pi, \frac{1}{p}\right)$ 1
- De lengte van PQ en van QR is $\sqrt{\pi^2 + \left(\frac{2}{p}\right)^2}$ (of het kwadraat is $\pi^2 + \left(\frac{2}{p}\right)^2$) 1
- PQ en QR staan loodrecht op elkaar als $\pi^2 + \left(\frac{2}{p}\right)^2 + \pi^2 + \left(\frac{2}{p}\right)^2 = (2\pi)^2$, dus als $\pi^2 = \frac{4}{p^2}$ 1
- Hieruit volgt $p = -\frac{2}{\pi}$ of $p = \frac{2}{\pi}$ 1

Driehoek met bewegend hoekpunt

13 maximumscore 5

- Als P op lijn k ligt, vormen A, B en P niet de hoekpunten van een driehoek — 1
- Een vergelijking van k is $y = 10 - \frac{1}{4}x$ — 1
- P ligt op k als $30 - 3t = 10 - \frac{1}{4}(18 + 5t)$ — 1
- Dit geeft $t = 14$ — 1
- De coördinaten van P zijn dan $(88, -12)$ — 1

of

- Als P op lijn k ligt, vormen A, B en P niet de hoekpunten van een driehoek — 1
- Een vergelijking van k is $y = 10 - \frac{1}{4}x$ — 1
- Een vergelijking van m is $y = -\frac{3}{5}x + 40\frac{4}{5}$ — 1
- P ligt op k als $-\frac{3}{5}x + 40\frac{4}{5} = 10 - \frac{1}{4}x$ — 1
- Dit geeft $x = 88$, waaruit volgt dat de coördinaten van P dan $(88, -12)$ zijn — 1

Vraag	Antwoord	Scores

14 **maximumscore 8**

- $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 18+5t \\ 20-3t \end{pmatrix}$ — 1
- $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -22+5t \\ 30-3t \end{pmatrix}$ — 1
- $\angle APB = 90°$, dus ($\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$, dus) $(18+5t)(-22+5t)+(20-3t)(30-3t)=0$ — 1
- Herleiden tot $t^2 - 5t + 6 = 0$ (of $34t^2 - 170t + 204 = 0$) — 1
- Dit geeft $(t-3)(t-2)=0$ (of $t = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$) — 1
- $t = 2$ geeft $P(28, 24)$ en $t = 3$ geeft $P(33, 21)$ — 1
- Berekenen van de lengtes van AP en BP (voor beide gevallen) — 1
- $AP \neq BP$, dus driehoek ABP is dan niet gelijkbenig (dus zo'n punt P is er niet) — 1

of

- AB is de diagonaal van het vierkant met hoekpunten A, B en P, dus P moet liggen op de andere diagonaal (de middelloodlijn van AB) op afstand $\frac{1}{2}AB$ van het midden van het vierkant — 1
- $M(20, 5)$ is het midden van lijnstuk AB (en van het vierkant) — 1
- $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \end{pmatrix}$ — 1
- Voor P moet gelden: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{AM}_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \end{pmatrix}$ waarbij $\overrightarrow{AM}_{\mathrm{L}}$ de vector is die je krijgt als je vector $\overrightarrow{AM}$ 90º linksom draait — 2
- Een berekening die aantoont dat het punt $(25, 25)$ niet op lijn m ligt — 2
- De conclusie dat driehoek ABP dan niet gelijkbenig is (dus zo'n punt P is er niet) — 1

of

- $\angle APB = 90°$, dus P ligt op de cirkel met middellijn AB — 1
- De cirkel met middellijn AB heeft vergelijking $(x-20)^2 + (y-5)^2 = 425$ — 1
- Snijden met lijn m geeft $(18+5t-20)^2 + (30-3t-5)^2 = 425$ — 1
- Herleiden tot $t^2 - 5t + 6 = 0$ (of $34t^2 - 170t + 204 = 0$) — 1
- Dit geeft $(t-3)(t-2)=0$ (of $t = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$) — 1
- $t = 2$ geeft $P(28, 24)$ en $t = 3$ geeft $P(33, 21)$ — 1
- Berekenen van de lengtes van AP en BP (voor beide gevallen) — 1
- $AP \neq BP$, dus driehoek ABP is dan niet gelijkbenig (dus zo'n punt P is er niet) — 1

of

Vraag	Antwoord	Scores

- $\angle APB = 90°$, dus $AP^2 + BP^2 = AB^2$ — 1
- $(18+5t)^2 + (20-3t)^2 + (-22+5t)^2 + (30-3t)^2 = 10^2 + 40^2 = 1700$ — 2
- Herleiden tot $t^2 - 5t + 6 = 0$ (of $68t^2 - 340t + 408 = 0$) — 1
- Dit geeft $(t-3)(t-2) = 0$ (of $t = \dfrac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$) — 1
- $t = 2$ geeft $P(28, 24)$ en $t = 3$ geeft $P(33, 21)$ — 1
- Berekenen van de lengtes van AP en BP (voor beide gevallen) — 1
- $AP \neq BP$, dus driehoek ABP is dan niet gelijkbenig (dus zo'n punt P is er niet) — 1

of

- Dan geldt $AP = BP$ — 1
- $AP^2 = BP^2$ geeft $(18+5t)^2 + (20-3t)^2 = (-22+5t)^2 + (30-3t)^2$ — 1
- Herleiden tot $60t + 724 = -400t + 1384$ — 1
- Dit geeft $t = \frac{33}{23}$ $(= 1,43...)$ — 1
- $P(25\frac{4}{23}, 25\frac{16}{23})$ $(= (25,17...; 25,69...))$ — 1
- $AP\ (= BP) = \sqrt{\left(25\frac{4}{23}\right)^2 + \left(15\frac{16}{23}\right)^2} = \sqrt{880\frac{42}{529}}$ $(= 29,66...)$ — 1
- $AB = \sqrt{1700}$ $(= 41,23...)$ — 1
- $AB \neq AP \cdot \sqrt{2}$, dus hoek P is dan niet recht (dus zo'n punt P is er niet) — 1

of

- Dan ligt P op de middelloodlijn van AB (want PA en PB zijn dan even lang) — 1
- Een vergelijking van deze middelloodlijn is $y - 5 = 4(x - 20)$ (of $y = 4x - 75$) — 1
- Snijden met lijn m geeft $30 - 3t - 5 = 4(18 + 5t - 20)$ — 1
- Dit geeft $t = \frac{33}{23}$ $(= 1,43...)$ — 1
- Dus $P(25\frac{4}{23}, 25\frac{16}{23})$ $(= (25,17...; 25,69...))$ — 1
- $AP^2 = \left(25\frac{4}{23}\right)^2 + \left(15\frac{16}{23}\right)^2 = 880\frac{42}{529}$ $(= 880,07...)$ — 1
- $AB^2 = 10^2 + 40^2 = 1700$ — 1
- $1700 \neq 2 \cdot 880\frac{42}{529}$, dus hoek P is dan niet recht (dus zo'n punt P is er niet) — 1

Opmerkingen

– *Voor het vierde en vijfde antwoordelement van het tweede antwoordalternatief mogen 0, 1 of 2 scorepunten worden toegekend.*

– *Voor het tweede antwoordelement van het vierde antwoordalternatief mogen 0, 1 of*

Afgeknotte paraboloïde

15 maximumscore 7

	• $V = \pi \int_a^b \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x$	1
	• Een primitieve van $\left(\sqrt{x}\right)^2$ $(= x)$ is $\frac{1}{2}x^2$	1
	• Dus $V = \pi(\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2)$	1
	• $m = \frac{1}{2}(a+b)$	1
	• $A = \pi \cdot \left(\sqrt{m}\right)^2 = \pi m = \pi \cdot \frac{1}{2}(a+b)$	1
	• $h = b - a$	1
	• $h \cdot A = (b-a) \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}(a+b) = \pi \cdot \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = \pi(\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2)$ $(= V)$	1
	of	
	• $V = \pi \int_a^b \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x$	1
	• Een primitieve van $\left(\sqrt{x}\right)^2$ $(= x)$ is $\frac{1}{2}x^2$	1
	• $a = m - \frac{1}{2}h$ en $b = m + \frac{1}{2}h$	1
	• Dus $V = \frac{1}{2}\pi\left((m + \frac{1}{2}h)^2 - (m - \frac{1}{2}h)^2\right)$	1
	• $V = \frac{1}{2}\pi\left(2mh\right) = \pi mh$	1
	• $A = \pi \cdot \left(\sqrt{m}\right)^2 = \pi m$	1
	• Dus $h \cdot A = h \cdot \pi m$ $(= V)$	1